

感染症の基本モデル

I 感染症の基本モデル

従来の感染症の推定では、基本再生数（患者一人が回復するまでに感染させる新規患者数）をパラメータとした共通モデルが利用されており、現実問題の適用では、基本再生数を実行再生数という名目で現実に合わせて発表が中心で、背景にある現象のモデルはあまり明確には示されていません。

例えば、小規模のPCR検査では医療崩壊が発生するとか、接触率のは80%以上削減しないとパンデミックになる等の報道の根拠が不明です。

これらの現象を理解するためには、感染疾患の隔離が最も重要な要因であることを考慮して、感染症患者を「隔離済感染者」と「未隔離感染者」に分けたモデルを導入しました。以下にモデルの概要を示します。

- 1) 感染者は、確率 α で人に感染させる（未感染者のワクチン接種、マスク着用等の防護体制で変わる）。
- 2) 感染者は、確率 β で治癒する（新薬の適用等により変わる）。
- 3) 感染者は、確率 γ で死亡する（新薬の適用等により変わる）。
- 4) 感染者は、確率 δ で隔離する（PCR 検査の普及等に依存する）。
- 5) 他人とは、確率 η で接触する（人口密度、通勤、宴会等の密集状態に依存する）。
- 6) 新規感染者は、既感染者に出会った未感染者数に比例して発生する（感染者の隔離等の処置により変わる）。

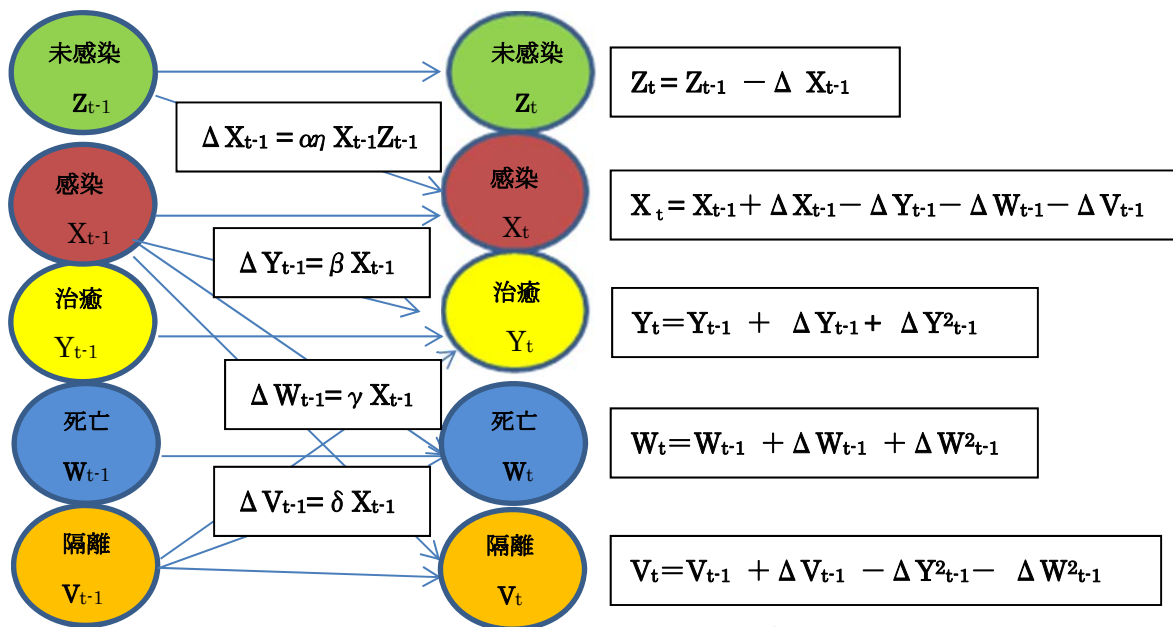
II モデルの導出

数学的な根拠が不要の方は、III章に進んでください。

新規感染者は、下記の式で導かれます。

Z_t, X_t, V_t, Y_t, W_t : 時刻 t での、未感染者、未隔離感染者、隔離感染者、治癒者、死者

新規感染者 = $\sum_k \alpha (\text{接触する未感染者グループ} \times \text{未隔離感染者 } k) = \alpha (\eta Z_{t-1}) X_{t-1} = \alpha \eta Z_{t-1} X_{t-1}$



基本モデル

$$\begin{aligned} dX/dt &= \alpha \eta Z X - dY/dt - dW/dt - dV/dt \\ &= \alpha \eta Z X - \beta X - \gamma X - \delta X = \alpha \eta Z X - (\beta + \gamma + \delta) X \\ dY/dt &= \beta X \\ dW/dt &= \gamma X \\ dV/dt &= \delta X \\ Z &= N - X - Y - V - W \end{aligned}$$

感染力のない集団 $U (=Y+V+W)$ と置くと、以下の式となる。

$$dX/dt = R_1(N-U-X)X - R_2X \quad R_1 = \alpha \eta = (\text{感染率})(\text{接触率})$$

$$dU/dt = R_2X \quad R_2 = \beta + \gamma + \delta = \text{感染終了率}$$

人口当たりの比率： $x = X/N$ $y = Y/N$ $u = U/N$ $R_0 = NR_1$ (一人の患者による新規感染患者数)

$$dx/dt = R_0(1-u-x)x - R_2x$$

$$du/dt = R_2x$$

時間変数の単位を、患者の感染力が無くなる（治癒、死亡、隔離）迄の平均時間 $(1/R_2)$ を採用する。

$s = t / (1/R_2)$ 、 $R_s = R_0/R_2$ (一人の患者が治癒・死亡・隔離する期間内に発生する新規患者数)

$$dx/dt = (dx/ds)(ds/dt) = R_2(dx/ds)$$

$$dx/ds = R_s(1-u-x)x - x$$

$$du/ds = x$$

III 基本再生関数

感染の進展は、次の実効再生数を導入した基本再生関数により推定が可能となる。

基本再生関数

$$dx/ds = R_s(1-u-x)x - x$$

$$du/ds = x$$

$$R_s = N\alpha\eta / (\beta + \gamma + \delta)$$

$$= \text{人口} \times \text{感染率} \times \text{接触率} / (\text{治癒率} + \text{死亡率} + \text{隔離率})$$

$$\equiv \text{実効再生数}$$

この方程式より、次の性質が導かれる。

$R_s < 1 \implies$ 新規患者の発生数より、感染力が無くなる（治癒・隔離・死亡）患者数の方が多い
 \implies 感染は終息する

基本再生数の定義より、政策的に決定が可能な接触率の抑制や PCR 検査による隔離の効果が明らかになります。

- 接触率を削減すれば、基本再生数は比例して減少する。
- PCR 検査により隔離を実施すれば、治癒率の向上と同程度の効果がある。

IV シミュレーション

最近の文献では、基本生産数は 3~5 の値が使用されているため、 $R_0 = 4.0 (= N\alpha\eta_0 / (\beta + \gamma))$ 、治癒・死亡率 $\beta=0.1$ 、隔離無し ($\delta=0$) と仮定して計算する。

図中の凡例は、Z:未感染者、X:未隔離感染者、V:隔離感染者、W:死者、U:感染終了者（治癒+死者+隔離）

1) 接触率と感染患者の変化

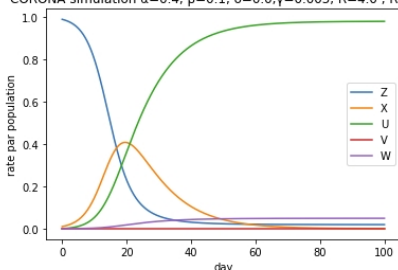
$R_0 = 4$ を中心に、接触率を変化させた効果： $\eta_k =$ 接触率を $k\%$ に規制

$$\eta_{100} = \eta \times 1.0 \quad R_{100} = R_0 \times 1.0 = 4.0$$

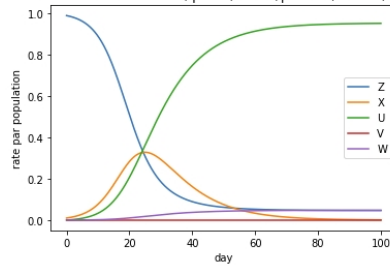
$$\eta_{80} = \eta \times 0.8 \quad R_{80} = R_0 \times 0.8 = 3.2$$

$$\eta_{60} = \eta \times 0.6 \quad R_{60} = R_0 \times 0.6 = 2.4$$

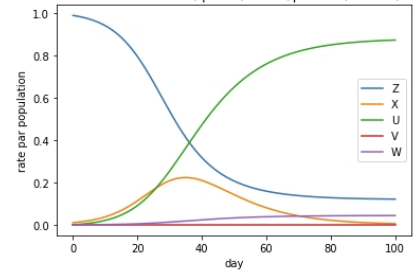
CORONA simulation $\alpha=0.4, \beta=0.1, \delta=0.0, \gamma=0.005, R=4.0, R_0=4.0$



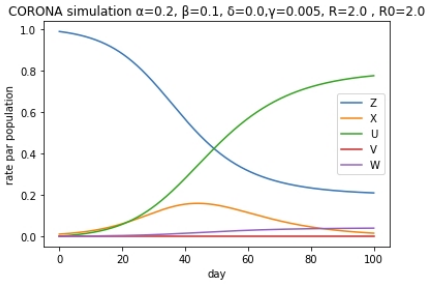
CORONA simulation $\alpha=0.32, \beta=0.1, \delta=0.0, \gamma=0.005, R=3.2, R_0=3.2$



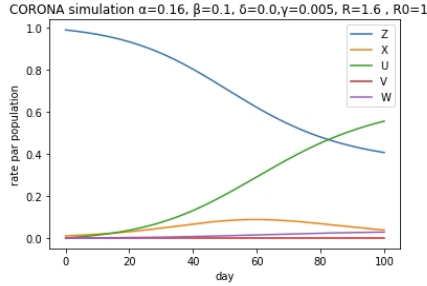
CORONA simulation $\alpha=0.24, \beta=0.1, \delta=0.0, \gamma=0.005, R=2.4, R_0=2.4$



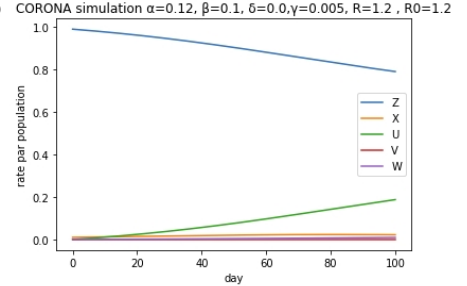
$$\eta_{50} = \eta \times 0.5 \quad R_{50} = R_0 \times 0.5 = 2.0$$



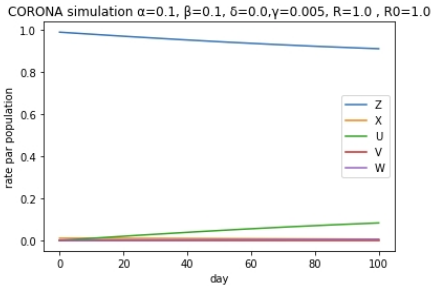
$$\eta_{40} = \eta \times 0.4 \quad R_{40} = R_0 \times 0.4 = 1.6$$



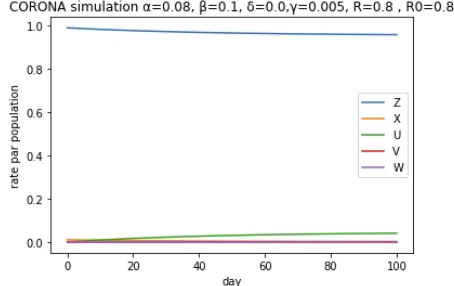
$$\eta_{30} = \eta \times 0.3 \quad R_{30} = R_0 \times 0.3 = 1.2$$



$$\eta_{25} = \eta \times 0.25 \quad R_{25} = R_0 \times 0.25 = 1.0$$



$$\eta_{20} = \eta \times 0.2 \quad R_{20} = R_0 \times 0.2 = 0.8$$



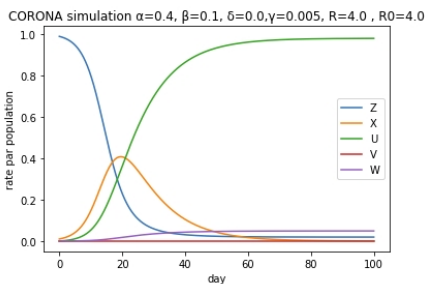
このシミュレーション結果からは、少なくとも接触率を 25%程度 (75%減) にしないと感染爆発は防止できないことが分かる。尚、75%減は、実効生産数=1 に対応している。

2) PCR 検査導入による隔離推進の効果

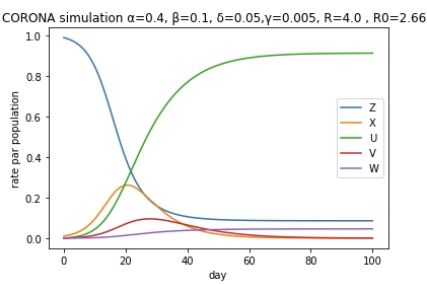
PCR 検査の拡充により、感染者の隔離を行うことにより感染源を遮断することは大きな効果が見込まれる。

PCR 検査により発見されて隔離が成功する確率 δ を変化させてシミュレーションを行う。

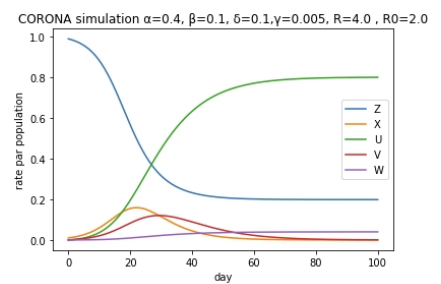
$$\delta = 0.0$$



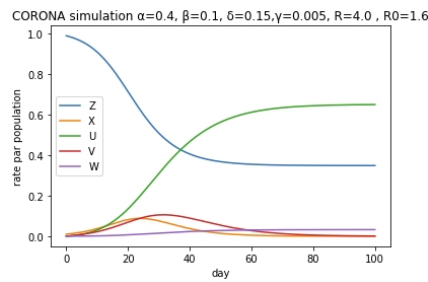
$$\delta = 0.05$$



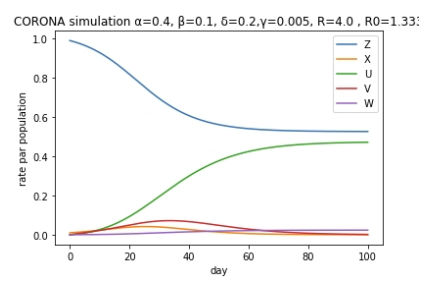
$$\delta = 0.1$$



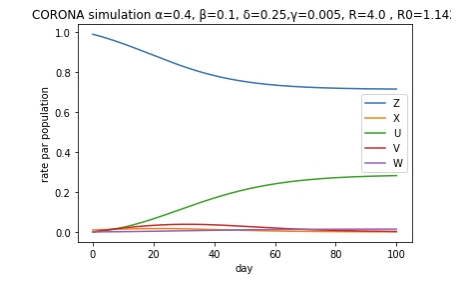
$$\delta = 0.15$$



$$\delta = 0.2$$



$$\delta = 0.25$$



このシミュレーションでは、X が未隔離感染者、V が隔離感染者を示している。これより、PCR 検査による患者の隔離が有効であることが分かる。しかし、 $\delta=0.1$ のケースのように、見逃した感染者による感染が広がって、結果的に隔離者が大量に発生しており、医療崩壊を発生させてしまう。これを防ぐには、大規模な検査の実施と接触率の削減

を同時に進める必要があることが分かる。従って、中途半端な PCR 検査の導入は医療崩壊となることを示している。

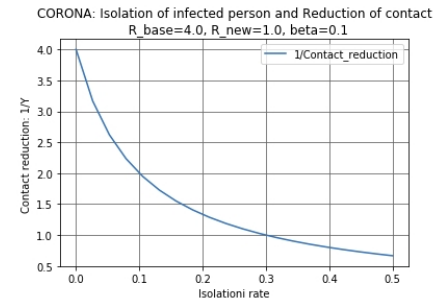
V 感染者隔離率と接触率の関係

今回のモデルより、施策として「接触率を削減する案」と「PCR 検査を導入する案」の組合せ方式が検討できる。

$$\begin{aligned} \text{実効再生数 } R_s &= N\alpha\eta / (\beta + \gamma + \delta) \\ &= \text{対象人口} \times \text{感染率} \times \text{接触率} / (\text{治癒率} + \text{死亡率} + \text{隔離率}) \end{aligned}$$

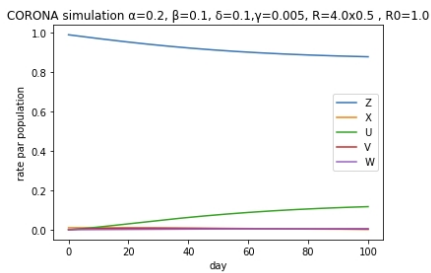
この式より、実効再生率を 1 にするために必要な「接触率の削減」と「PCR 検査による感染者隔離」の関係が説明できる。

右の図は現在の基本再生数 = 4 の場合に、実効再生数 = 1 にするために必要な施策が示されている。縦軸は、接触の削減割合 (1/x) の x で表示している。横軸は、感染者の隔離率を表している。

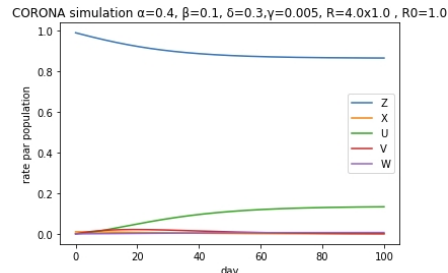


例えば、感染者の隔離率が 0.1 の場合には、接触率を 1/2 にすればよいことが分かる。感染者の隔離率が 0.3 の場合には、現在の接触率のままでも終息可能と考えられる。

1) 接触率が 1/2 倍 隔離率が 0.1



2) 接触率が 1.0 倍 隔離率が 0.3



このように、感染者を隔離感染者と未隔離感染者に分割したモデルを採用することにより、PCR 検査と接触率の削減の適正な規模が推定可能で、終息可能な対策をの目途を得ることができる。

VI おわりに

今回は新型コロナウイルス感染拡大の数理モデルを構築して、施策の評価の可能性を検討した。

私は、感染症の研究者ではないので、今回の計算結果は、基本生産数等の数値を現実に近い値に仮定して、数理的なモデル化の可能性を追求した理論上の結果である。

実際のデータを収集して、地域特性を考慮した接触率や感染率を推定して、現実の問題に適用して、正当性の確認を行う必要があるが、各種の施策のマクロな評価は、今回のモデルも可能と思われる。

注) 接触率と地域特性について

接触率 η は、総人口 N の何%と濃厚接触するかを示す指標で、 $\eta = \text{接触数} / \text{総人口}$ となるので、総人口が増えると反比例して減少する。ここで $N\eta$ が平均的な個人接触数 M となります。この M は、地域特性 (人口密度、通勤の割合等) を考慮して推定できますので、 $\eta = M/N$ を代入した次のモデルにより、地域特性を考慮したモデルが導入できます。

$$\begin{aligned} R_s &= N\alpha\eta / (\beta + \gamma + \delta) = M\alpha / (\beta + \gamma + \delta) \\ &= \text{個人接触者数} \times \text{感染率} / (\text{治癒率} + \text{死亡率} + \text{隔離率}) \end{aligned}$$